

**EXAMEN DE MATEMÁTICAS**  
**ÁLGEBRA**

27-11-09

❶ Discute y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+1)x + y + z = 0 \\ x + (a+1)y + z = 0 \\ x + y + (a+1)z = 0 \end{array} \right\} \quad (2 \text{ puntos})$$

❷ Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales según los diferentes valores del parámetro  $a$ , y resuélvelo cuando sea posible:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = 5 \\ y + z = a \\ x - 2z = 3 \\ 2x - 3z = a \end{array} \right\} \quad (2 \text{ puntos})$$

❸ a) Utilizando las propiedades de los determinantes, halla el valor de :

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ba \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \quad (1 \text{ punto})$$

b) Estudia en función de  $t$  el rango de la matriz:  $\begin{pmatrix} 2 & -t & t & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ t & t & -5 & 2 \end{pmatrix}$  (1 punto)

❹ Clasifica el sistema según los valores de  $m$  y resuélvelo para  $m=-1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 5y + 4z = -1 \\ x + 3y + m^2z = 3m \end{array} \right. \quad (2 \text{ puntos})$$

❺ Halla la matriz  $X$  que cumpla la condición  $X \cdot B + B = B^{-1}$

siendo  $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  (2 puntos)

## SOLUCIÓN

**Nº1.-** Si  $a=0 \rightarrow \text{Rg}(A)=1=\text{Rg}(A') \rightarrow$  Sistema compatible indeterminado

Solución:  $(t, s, -t-s)$  para cualquier valor real de  $t$  y  $s$

Si  $a=-3 \rightarrow \text{Rg}(A)=2=\text{Rg}(A') \rightarrow$  Sistema compatible indeterminado

Solución:  $(t, t, t)$  para cualquier valor real de  $t$ .

Si  $a \neq 0$  y  $a \neq -3 \rightarrow \text{Rg}(A)=3=\text{Rg}(A') \rightarrow$  Sistema compatible determinado con solución  $(0,0,0)$

**Nº2.-** Si  $a=10 \rightarrow \text{Rg}(A)=3=\text{Rg}(A') \rightarrow$  Sistema compatible determinado con solución  $(11,6,4)$

Si  $a \neq 10 \rightarrow \text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(A') \rightarrow$  Sistema incompatible

**Nº3.-** El valor del determinante es  $a^2(a^2 - b^2)^2$

**Nº4.-** Si  $m=1 \rightarrow \text{Rg}(A)=2 \neq \text{Rg}(A')=3 \rightarrow$  Sistema incompatible

Si  $m=-1 \rightarrow \text{Rg}(A)=2=\text{Rg}(A') \rightarrow$  Sistema compatible indeterminado

Si  $m \neq \pm 1 \rightarrow \text{Rg}(A)=3=\text{Rg}(A') \rightarrow$  Sistema compatible determinado

Solución para  $m=-1 \rightarrow (12-7t, -5+2t, t)$  para cualquier valor real de  $t$

**Nº5.-** La solución de la ecuación es  $X = (B^{-1})^2 - I$

$$(B^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$